

Module "Prise en compte de l'aléa", (durée 1,5 h)

Correction du partiel, 2025

Exercice 1 Le service de dépannage d'un grand magasin dispose d'équipes intervenant sur les appels de la clientèle. Pour des causes diverses, les interventions ont parfois lieu avec retard. On admet que les appels se produisent indépendamment les uns des autres, et que, pour chaque appel, la probabilité d'un retard est de 0,25.

1. Un client appelle le service à 4 reprises. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de fois où ce client a dû subir un retard.
 - (a) Déterminer la loi de X , son espérance, et sa variance.
 - (b) Calculer la probabilité de l'évènement : "le client a au moins subi un retard".

— X suit une *binomiale*(4, 0.25). Donc, $\mathbb{E}(X) = 4 \times 0.25 = 1$, et $Var(X) = 4 \times 0.25 \times 0.75 = 0.75$

— On a :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(\text{le client a au moins subi un retard}) &= \mathbb{P}(X \geq 1) \\
 &= 1 - \mathbb{P}(X = 0) \\
 &= 1 - \binom{4}{0} \times 0.25^0 \times 0.75^4 \\
 &= 1 - 0.75^4 \\
 &\approx 0.68
 \end{aligned}$$

2. On suppose que le magasin reçoit 100 appels par jour. Soit Y la v.a indiquant le nombre d'appels pour un retard.

- (a) Préciser la loi de Y .

$Y \sim \text{binomiale}(100; 0.25)$

- (b) A l'aide d'une approximation en loi à justifier, calculer la probabilité qu'il y a ait plus de 30 appels pour cause de retard.

-On a $n = 100 \geq 30$, $np = 25 \geq 5$ et $n(1 - p) = 75 \geq 30$, donc on peut approximer la loi de Y par une $\mathcal{N}(25; 4.33)$

-Ainsi,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(Y \geq 30) &\approx \mathbb{P}(X \geq 30) \quad \text{où } X \sim \mathcal{N}(25; 4.33) \\
 &= \mathbb{P}\left(Z \geq \frac{30 - 25}{4.33}\right) \quad \text{où } Z \sim \mathcal{N}(0; 1) \\
 &= \mathbb{P}(Z \geq 1.15) \\
 &= 0.1251
 \end{aligned}$$

- (c) Quel est le nombre maximum d'appels pour cause de retard auquel on peut s'attendre avec proba 0.95 ?
 On cherche le nombre d'appels a tel que $\mathbb{P}(Y \leq a) = 0.95$. Avec l'approximation précédente, cela revient à trouver a tel que $\mathbb{P}(Z \leq \frac{a-25}{4.33}) = 0.95$. La table donne $\frac{a-25}{4.33} = 1.645$, soit $a = 32, 12$
- (d) Si la probabilité qu'un appel pour un retard avait été de 0,05, par quelle loi auriez vous approximé la loi de Y ? Préciser le(s) paramètre(s).
 Dans le cas où $p = 0.05 \leq 0.1$, on aurait approximé la loi de Y par une loi de *Poisson*(5). (le paramètre est np .)

Exercice 2 Une machine produit des pièces dont la longueur est une variable aléatoire X . Une pièce est acceptable si sa longueur est comprise entre 28.18 mm et 28.22 mm.

1. Dans un premier temps (dans cette question), on estime que X suit une loi Normale $\mathcal{N}(28.20 ; 0.0122)$. Calculer la probabilité qu'une pièce tirée au hasard soit jugée acceptable.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(\text{pièce acceptable}) &= \mathbb{P}(28.18 \leq X \leq 28.22) \\
 &= \mathbb{P}\left(-\frac{0.02}{0.0122} \leq Z \leq \frac{0.02}{0.0122}\right) \quad \text{où } Z \sim \mathcal{N}(0; 1) \\
 &= \mathbb{P}(Z \leq 1.64) - \mathbb{P}(Z \leq -1.64) \\
 &= 2 \times \mathbb{P}(Z \leq 1.64) - 1 \\
 &= 0.899
 \end{aligned}$$

2. (a) On suppose que l'écart-type $\sigma(X) = 0,012$ et on désire estimer l'espérance $\mu = \mathbb{E}(X)$ de la longueur des pièces produites par l'analyse d'un échantillon. Quelle doit être la taille de l'échantillon pour obtenir un intervalle de confiance de μ d'amplitude 0,01 mm centré en la moyenne observée sur l'échantillon, au risque 1% ?

L'IC pour l'espérance est de la forme $[\bar{X}_n - u_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X}_n + u_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$
 Pour $\alpha = 0.01$, on a $u_{1-\alpha/2} = 2.57$ et l'amplitude $2u_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ est inférieure à 0.01 donne $n \geq (2u_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{0.01})^2 \approx 38, 04$.

L'échantillon doit donc être au moins de 39

- (b) Sur un échantillon de 50 pièces prélevées au hasard, la moyenne observée est $\bar{X}_{50} = 28,095$. Déterminer un intervalle confiance centré en $\bar{X}_{50}$, où se trouve μ au risque 1%. (Donner 3 chiffres significatifs après la virgule)

On reprend l'intervalle précédent avec $\bar{X}_{50} = 28,095$, $u_{1-\alpha/2} = 2.57$, $n = 50$ et $\sigma = 0.012$. On obtient donc l'IC suivant :

[28.090; 28.10] au risque 1%

- (c) Sans calcul, préciser comment évoluerait l'intervalle de confiance précédent si on fixait le risque à 5%.

Si l'on augmente le seuil de risque α , l'amplitude de l'IC diminue.
 En effet, augmenter le α "fait" diminuer le $u_{1-\alpha/2}$.

3. On complète l'analyse par une étude des retours en usine pour non-conformité. Sur 250 pièces expédiées, 21 ont été retournées. On notera $f = 21/250$. Construire, pour estimer la probabilité p qu'une pièce produite ne soit pas acceptable, un intervalle de confiance au niveau de confiance 95%.

On utilise l'IC du cours d'une proportion $[\bar{p}_n - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{p}_n(1-\bar{p}_n)}{n}} ; \bar{p}_n + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{p}_n(1-\bar{p}_n)}{n}}]$ au risque α . On a ici, $n = 250$, $\bar{p}_n = f = 21/250$. Les conditions $n \geq 30$ et $\min(np_n ; n(1-p_n)) \geq 5$ sont bien satisfaites. Pour $\alpha = 0.05$, on lit $u_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$. Numériquement, on a donc :
 $p \in [0.049; 0.119]$ au risque 5%.

Exercice 3 Lors d'un forum d'entreprise qui a attiré plus de 3000 personnes, le stand de l'entreprise A a une fréquentation de 28%. On interroge 120 personnes. Donner un intervalle de fluctuation au niveau 0,95 du nombre de personnes ayant visité le stand de A.

Pour $1 \leq i \leq 120$, notons $X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la personne } i \text{ a visité le stand A,} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Par hyp, $X_i \sim \text{bernoulli}(p)$ avec $p = 0.28$. On utilise l'intervalle de fluctuation d'une proportion empirique : $\bar{X}_n \in [p - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}]$ au risque α . On a ici, $n = 120$, $p = 0.28$. Les conditions $n \geq 30$ et $\min(np ; n(1-p)) \geq 5$ sont bien satisfaites. Pour $\alpha = 0.05$, on lit $u_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$. Numériquement, on a donc : $\bar{X}_{120} \in [0.199; 0.361]$ au risque 5%, ce qui donne en passant aux effectifs :

Nb de personnes ayant visité le stand A $\in [23; 44]$ au risque 5%.

Exercice 4 On souhaite déterminer la dépense moyenne des clients d'un supermarché. On suppose que la distribution des dépenses des clients suit une loi Normale. On interroge un échantillon de clients à la sortie du supermarché et on obtient les résultats suivant (en €) :

140	120	140	98	90	210	150	160
45	128	89	95	205	180	190	200

Déterminer un intervalle de confiance pour la dépense moyenne au niveau 90%.

Pour $1 \leq i \leq 16$, notons $X_i =$ montant du ticket de caisse de la personne i . On cherche un IC de $\mathbb{E}(X_i)$.

On ne connaît pas $\sigma(X_i)$, on l'approchera donc par son estimateur S_n . Nous avons comme hyp que les X_i sont Gaussiens, on peut donc utiliser l'IC suivant : $\mathbb{E}(X_i) \in [\bar{X}_n - u_{1-\alpha/2} \frac{S_n}{\sqrt{n-1}} ; \bar{X}_n + u_{1-\alpha/2} \frac{S_n}{\sqrt{n-1}}]$ au risque α , où la valeur du u doit être lue dans la table de $Student(n-1)$.

On a ici, $n = 16$, $\bar{X}_n = 140$ et $S_n \approx 47.29$. Pour $\alpha = 0.05$, on lit dans la table $Student(15)$, $u_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.753$. Numériquement, on a donc :

$\mathbb{E}(X_i) \in [118.59; 161.41]$ au risque 10%.